泰勒公式

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

设 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，能否找到一个关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

来近似表达 $f(x)$，使得 $f(x)-p_n(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时比 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小.

设 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，能否找到一个关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

来近似表达 $f(x)$，使得 $f(x) - p_n(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时比 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小.

A: 能找到！且多项式的系数 $a_k(k=0,1,2,\ldots,n)$ 由 $f(x)$ 在 x_0 处的 k-阶导数确定！

定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 1)

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，那么存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域内的任一 x，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n).$$

定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 1)

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，那么存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域内的任一 x，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n).$$

- $p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 1)

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，那么存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域内的任一 x，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n).$$

- $p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
- $p_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0), k=0,1,2,\ldots,n$.

定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 1)

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内的任一 x, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n).$$

- $p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
- $p_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0), k=0,1,2,\ldots,n$.
- $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ 称为皮亚诺余项.

定理 (泰勒 (Taylor) 中值定理 2)

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 导数, 那么对任一 $x \in U(x_0)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!(x-x_0)^{n+1}},$$

这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

- $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!(x-x_0)^{n+1}}$ **称为拉格朗日余项.**

在泰勒公式中，取$x_0 = 0$

- 带皮亚诺余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

- 带拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{x+1} \quad \exists \theta \in (0,1).$$

例 1

写出函数 $f(x)=e^x$ 的带有拉格朗日余项的 n 麦克劳林公式.

例 1

写出函数 $f(x)=e^x$ 的带有拉格朗日余项的 n 麦克劳林公式.

解因为 $f^{(k)}(x)=e^x, n=0,1,2,\ldots,n+1$. 故

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=e^0=1.$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \exists\theta\in(0,1)$$

例 1

写出函数 $f(x)=e^x$ 的带有拉格朗日余项的 n 麦克劳林公式.

解因为 $f^{(k)}(x)=e^x, n=0,1,2,\ldots,n+1$. 故

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=e^0=1.$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad \exists\theta\in(0,1)$$

根据 Taylor 中值定理 2, 所求麦克劳林公式为

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad \exists\theta\in(0,1)$$

拉格朗日余项满足

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

作业

- 教材习题 3-3：4.